Regards croisés sur Camille Jordan.

Frederic Brechenmacher

Regards croisés sur Camille Jordan (1838-1922)

par Frédéric BRECHENMACHER

Centre Koyré,
École des Hautes Études en Sciences Sociales (E.H.E.S.S.) - Paris
e-mail : flaibbrec1@noos.fr

Des regards portés sur Camille Jordan par ses contemporains et ses successeurs permettent d'esquisser un portrait du mathématicien originaire de Lyon. Afin d'accompagner, par cette perspective historique, la création d'un institut regroupant des recherches mathématiques pures et appliquées, un éclairage particulier est porté sur le rôle des applications dans les travaux d'un mathématicien souvent qualifié de « grand algébriste » [Picard 1922,VIII] à la charnière des XIX^{e}et XX^{e}siècles.

Leopold Kronecker [1874b, 19] :

> [...] dans le Mémoire de *M. Jordan « Sur les formes bilinéaires » (Journal de M. Liouville, 2e série t. XIX, pp. 35-54)*, la solution du premier problème n'est pas véritablement nouvelle ; la solution du deuxième est manquée, et celle du troisième n'est pas suffisamment établie. Ajoutons qu'en réalité ce troisième problème embrasse les deux autres comme cas particuliers, et que sa solution complète résulte du travail de*M. Weierstrass* de 1868 et se déduit aussi de mes additions à ce travail. Il y a donc, si je ne me trompe, de sérieux motifs pour contester à *M. Jordan* l'invention première de ses résultats, en tant qu'ils sont corrects ; [...].

Une vive controverse oppose, en 1874, Camille Jordan à Leopold Kronecker. Une série de notes et de mémoires, publiés aux académies des sciences de Paris et Berlin, sont autant d'attaques et contre attaques des deux protagonistes. La querelle, qui oppose deux mathématiciens qui furent parmi les premiers à faire fructifier l'héritage de Galois, est l'occasion d'aborder tout à la fois la vie et l'œuvre du mathématicien originaire de Lyon [2] ; elle intervient à une charnière de la carrière de Jordan qui, dans les années 1870 se détache progressivement de sa profession d'ingénieur des mines pour venir occuper des positions institutionnelles clés des mathématiques parisiennes [3]. Cette évolution de carrière est indissociable d'une évolution profonde des travaux mathématiques de Jordan. Après

[2] Ce court article n'a pas prétention à traiter toute la richesse historique de la controverse Jordan-Kronecker. Une publication ultérieure sera consacrée à la querelle. Plus globalement, ce travail est issu de recherches menées dans le cadre d'une thèse de doctorat laquelle je renvoie pour tout approfondissement : [Brechenmacher, 2005].

[3] Nommé examinateur à l'école polytechnique en 1873, Jordan succède à Hermite dans sa charge de professeur d'analyse en 1876 ; il postule à l'académie des sciences dès 1872 et est élu à la suite du décès de Chasles en 1881 ; en 1883 il remplace Liouville au Collège de France et à la direction du *Journal de mathématiques pures et appliquées* en 1885

une première période consacrée presque exclusivement à la théorie des substitutions, les années 1870 voient les recherches de Jordan prendre une nouvelle envergure par une diversification qui se nourrit de la capacité du mathématicien à appliquer les notions et méthodes développées pour la théorie des groupes à des domaines variés comme les systèmes d'équations différentielles linéaires [1871], la théorie des formes bilinéaires et quadratiques [1874] et l'intégration algébrique des équations différentielles [1878]. Les notions et méthodes de la théorie des groupes ne viennent pas seules dans les applications, le regard critique de Kronecker révèle les idéaux disciplinaires qui les accompagnent sur le rôle de l'algèbre dans les *applications*, rôle justifié par une capacité à atteindre une *pure* généralité.

I. La controverse Jordan-Kronecker de 1874.

La querelle a pour origine l'ambition formulée par Jordan, dans une note aux Comptes Rendus de 1873, de réorganiser la théorie des formes quadratiques et bilinéaires autour d'une unique notion qu'il qualifie de « simple », la notion de forme canonique. [Jordan, 1873, 1487] :

> On sait qu'il existe une infinité de manières de ramener un polynôme bilinéaire
>
> $$P = \sum A_{\alpha\beta} x_{\alpha\beta} y_{\alpha\beta} \quad (\alpha = 1, 2, \cdots, n,\ \beta = 1, 2, \cdots, n)$$
>
> à la forme canonique $x_1y_1 + \cdots + x_my_m$ [...] par des transformations linéaires opérées sur les deux systèmes de variables $x_1, \cdots x_n, y_1, \cdots, y_n$. Parmi les diverses questions de ce genre que l'on peut se proposer, nous considérons les suivantes :
> 1. Ramener un polynôme bilinéaire P à une forme canonique simple par des substitutions orthogonales opérées les unes sur $x_1, ..., x_n$, les autres sur $y_1, ..., y_n$.
> 2. Ramener P à une forme canonique simple par des substitutions linéaires quelconques opérées simultanément sur les x et les y.
> 3. Ramener simultanément à une forme canonique deux polynômes P et Q par des substitutions linéaires quelconques, opérées isolement sur chacune des deux séries de variables.

Qu'est ce qu'une forme bilinéaire en 1874 ? La controverse révèle la dynamique historique d'une notion en pleine évolution. La note de Jordan est la première publication parisienne consacrée aux « polynômes bilinéaires »et la querelle qui en résulte se présente d'abord comme un fort moment de communication entre Paris et Berlin[4]. La controverse signale les enjeux nouveaux portés par une notion encore jeune puisque développée dans les années 1860 par un petit groupe de mathématicien berlinois dans le contexte de l'un des grands domaines de recherches de l'époque, la théorie des fonctions elliptiques et abéliennes[5]. Dans les

[4]Le terme « polynôme bilinéaire » utilisé en 1873 illustre la communication portée par la controverse : dès 1874, Jordan le remplace par l'expression « forme bilinéaire » utilisée par Kronecker et qui renvoie à l'arithmétique des formes de Gauss.

[5]Des recherches sur la transformation des fonction thêta de plusieurs variables sont à l'origine de

années 1874-1880, la notion de forme bilinéaire passe d'un sujet de recherche local à une théorie d'envergure internationale. Ce passage procède d'un double mouvement : d'une part la notion de forme bilinéaire s'affirme comme participant d'une théorie autonome qui, se détachant du contexte local de sa création, tient d'une mathématique *pure* ; dans le même temps, c'est sa capacité à *s'appliquer* dans divers domaines des mathématiques qui permet à cette mathématique des formes de revêtir une épaisseur théorique. La classification proposée par Jordan pour ordonner la théorie met en évidence une diversité de domaines d'interventions en théorie des nombres, géométrie, intégration des équations différentielles : c'est par sa grande étendue d'applications que la notion de forme bilinéaire accède, dans les années 1870 au statut de théorie autonome [6].

L'enjeu de la controverse en résulte : il s'agit d'organiser l'objet et les méthodes d'une théorie destinée à jouer un rôle essentiel dans les mathématiques de la fin du XIXesiècle[7]. Lorsque Jordan propose d'articuler la théorie par la notion de forme canonique, la réplique de Kronecker ne se fait pas attendre et une querelle de priorité se développe sur l'opposition de deux théorèmes, découverts indépendamment et dans des théories différentes : l'un, du à Weierstrass [1868] définit des invariants, les diviseurs élémentaires, pour caractériser l'équivalence des couples de formes bilinéaires ; l'autre, énoncé par Jordan en 1870, définit une forme canonique des substitutions linéaires dans un contexte de recherches sur la résolubilité des équations algébriques[8]. Forme canonique ou invariants ? La question de méthode dépasse la simple querelle de priorité tant elle est perçue comme exemplaire de la capacité de l'algèbre à atteindre la *généralité* : si la réduction d'un couple (A, B) à une forme canonique simple $(x_1y_1 + \cdots + x_ny_n, , s_1x_1y_1 + \cdots + s_nx_my_m,)$ est toujours possible dans le cas particulier où les racines $s_1, s_2, \cdots, s_n$ de l'équation caractéristique $|A + sB| = 0$ sont toutes distinctes, le théorème de Weierstrass permet, pour Kronecker, de dépasser ce cas particulier, seul traité

la publication, en 1866, de deux mémoires de Christoffel et Kronecker qui revendiquent la création d'une véritable théorie générale des formes bilinéaires.

[6] La « forme canonique » $x_1y_1 + \cdots + x_my_m$ généralise la loi d'inertie de la théorie des formes quadratiques. En termes contemporains, il s'agit de déterminer les classes d'équivalence des matrices carrées pour la relation d'équivalence $(ARB \widetilde{n} \llcorner P, Q \bullet GL_n(), PAQ = B.)$ Le problème 1 fait référence à la classification des fonctions homogènes du second degré réalisée par Cauchy en 1829 dans un cadre géométrique (coniques et quadriques). Le problème 2 renvoie à la question arithmétique de l'équivalence des formes quadratiques dans la tradition de Gauss (relation de congruence $B =^t PAP$). Le problème 3 provient de la théorie des systèmes d'équations différentielles linéaires à coefficients constants $AY' + BY = 0$(équivalence des couples de matrices (A, B) ou des faisceaux $\lambda A + \mu B$; si le couple considéré est (A, I) où I est la forme identité, alors $B = P^{-1}AP$, il s'agit de la similitude des matrices). Comme le fait remarquer Kronecker, le 3eproblème suffit à déduire les deux autres : le problème 1. revenant à l'étude de la congruence du couple (A, I) et le 2. du couple (A, tA).

[7] Les nouveaux enjeux de la théorie des formes bilinéaires sont illustrés la publication d'un très influent mémoire de Frobenius en [1878]. En termes contemporains, la notion de forme bilinéaire joue pendant longtemps un rôle analogue à celui que jouera la notion de matrice dans l'algèbre linéaire du XX esiècle.

[8] Le théorème de Weierstrass ne s'applique qu'au cas où le déterminant du faisceau $\lambda A + \mu B$ n'est pas nul, un mémoire de Kronecker lui succède en 1868 pour traiter le cas singulier. Pour une histoire des diviseurs élémentaires voir [Hawkins, 1977]. D'un point de vue contemporain, la donnée de la forme canonique de Jordan est équivalente à celle des diviseurs élémentaires d'une matrice.

« pendant si longtemps », et d'atteindre la « vraie généralité » ; il pose la théorie des formes bilinéaires comme une des rares théories algébriques développée « dans toutes ses particularités », un modèle de généralité face aux anciennes méthodes négligeant l'occurrence de racines multiples et critiquées comme « formelles » car génériques. Lorsque, en 1873, Jordan se propose de traiter le problème 3. par une méthode qu'il juge non seulement plus « simple » mais aussi plus « générale »[9], la controverse qui s'en suit voit s'opposer des idéaux disciplinaires forts sur ce que doit être le rôle de l'algèbre et sa capacité à la généralité.
Kronecker accuse Jordan de commettre une confusion entre ce qui tient de la méthode et ce qui doit être le seul objet de la nouvelle théorie : déterminer à quelles conditions une forme peut être transformée en une autre ; pour cet objet, si la recherche d'une forme canonique peut tenir lieu de méthode, elle ne saurait dicter l'organisation de la théorie. Plus profondément, pour Kronecker, c'est toute l'algèbre qui est du côté des méthodes, ne tirant sa justification que de son « service aux autres disciplines » comme l'« arithmétique des formes » dans laquelle s'inscrit la théorie des formes bilinéaires dans la tradition de Gauss. Cette critique manifeste l'idéal arithmétique de Kronecker pour lequel une question mathématique doit recevoir une résolution effective : la forme canonique ne peut atteindre un statut de méthode générale car elle nécessite la résolution d'une équation algébrique générale, dont on sait l'impossible résolution effective, au contraire des diviseurs élémentaires redéfinis par Kronecker comme des invariants arithmétiques [10]. Face aux idéaux arithmétiques avancés par Kronecker, les arguments utilisés par Jordan pour sa défense sont d'un premier abord moins explicites. Pour Jordan, « généralité » rime avec « simplicité ». Que signifie cet idéal de simplicité ? Faut il n'y voir qu'un simplisme ingénu comme le caricature Kronecker ? Expliciter la revendication de simplicité de Jordan nécessite un regard rétrospectif sur les recherches qui vont permettre à Jordan d'accéder, en 1870, au statut de « grand algébriste ».

II. Un grand algébriste.

A la mort de Jordan, en 1922, les regards portés par ses successeurs voient dans la publication du *Traité des substitutions* de 1870 la consécration d'un « grand algébriste » [Picard 1922, VIII] :

> « Mais c'est surtout dans la théorie des substitutions et des équations algébriques que Jordan laisse une trace profonde. Dans un ouvrage considérable sur les Substitutions, il a fait une étude approfondie des idées de Galois, en y ajoutant des résultats fondamentaux [...] dont un des plus importants est re-

[9] En termes contemporains, le cas « générique » négligeant l'occurrence de racines multiples se limite aux matrices diagonalisables. Les diviseurs élémentaires et la forme de Jordan permettent de traiter le cas général de la similitude des matrices. Un faisceau non singulier $sA + B, |A| \neq 0$, est équivalent à $sI - J$ où J est sous forme de Jordan.

[10] La forme de Jordan et les diviseurs élémentaires de Weierstrass nécessitent un corps algébriquement clôt. La notion de facteur invariant développée par Kronecker et Frobenius (p.g.c.d. successifs des mineurs d'une matrice) est valable dans un anneau principal.

> latif aux facteurs de composition d'un groupe. Ces études ont permis à Jordan de résoudre un problème posé par Abel, celui de rechercher les équations de degré donné résolubles par radicaux et de reconnaître si une équation rentre ou non dans cette classe. [...] Tous les travaux de Jordan dénotent une rare profondeur d'esprit et une extraordinaire puissance d'abstraction. Il se jouait au milieu des discussions les plus subtiles sur des concepts comme ceux de groupes ou de substitutions, se plaisant à aborder les questions dans toute leur généralité, comme s'il craignait que quelque particularité l'empêchât de voir les vraies raisons des choses. Jordan a été vraiment un grand algébriste ; [...].

Mais qu'est ce qu'un « grand algébriste » en 1870 ? Le discours de Picard donne quelques mots clés : « Galois », « Abel », « groupes », « équations », « abstraction », « généralité ». On pourrait ajouter le terme « méthode géniale de Galois » utilisé par Henri Lebesgue pour caractériser la charnière dans l'histoire de l'algèbre que représente le passage d'une science des équations à une étude « abstraite » des « groupes » [Lebesgue, 1923, XX-XXI] :

> Dans ses recherches, Jordan utilise la géniale méthode de Galois, dont le point essentiel est l'introduction d'un certain nombre de substitutions, déjà aperçu par Lagrange, que l'on peut attacher à chaque équation algébrique et dans lequel les propriétés des équations se reflètent fidèlement. Mais pour savoir observer dans ce miroir, il faut avoir appris à distinguer les diverses qualités des groupes de substitutions et à raisonner sur elles. C'est ce qu'à fait Jordan avec une habile ténacité et un rare bonheur ; dans son *Traité des Substitutions* et des Equations algébriques, où il a réuni et coordonné ses recherches, les propriétés des équations dérivent tout de suite de celles des groupes de substitutions. Les principales qualités des groupes qui servent à Jordan sont caractérisées par les qualités transitif ou intransitif, primitif ou imprimitif, simple ou composé. Le théorème de Jordan sur la composition des groupes est le plus connu de tous ses résultats, il entraîne cette conséquence fondamentale : il n'y a pas lieu de choisir entre les différents procédés de résolution algébrique d'une équation ; ils sont tous équivalents et conduisent aux mêmes calculs, à l'ordre près.

Ce qui permet de voir les « vraies raisons des choses », c'est un « miroir » qui « reflète » l'étude quantitative des équations en une algèbre des « qualités », comparée à une science de la nature [Lebesgue, 1923, XXIII]. Or c'est le *Traité* de Jordan qui, dans l'histoire écrite par ses successeurs, est perçu comme matérialisant ce « miroir » métaphorique dont le reflet symbolise la mutation de l'algèbre. La métaphore du « miroir » prend son sens mathématique par le reflet de deux théorèmes [Jordan, 1870, 385] :

> Galois a démontré dans un mémoire célèbre [...], que chaque équation algébrique est caractérisée par un certain groupe de substitutions dans lequel se reflètent ses principales propriétés : proposition capitale qui fait dépendre la théorie toute entière des équations de celle des substitutions.
> [...]

> THEOREME II. – Pour qu'une équation soit résoluble par radicaux, il faut et il suffit que sa résolution se ramène à celle d'une suite d'équations abéliennes de degré premier. [...] Autre énoncé du même théorème :
> THEOREME III. – Pour qu'une équation soit résoluble par radicaux il faut et il suffit que ses facteurs de composition soient tous premiers.

Mais au-delà de ce miroir, qui est l'homme Jordan ? Comment en vient-il à personnifier, à l'age de 32 ans, la nouvelle algèbre ? Né le 5 janvier 1838 à la Croix Rousse, Jordan est issu d'une famille de notables lyonnais. Son père, Esprit Alexandre, est polytechnicien et ingénieur des ponts et chaussées. Sa mère, Joséphine, est la fille d'un ingénieur en chef des mines et la sœur du peintre symboliste Pierre Puvis de Chavannes (1824-98). Lebesgue, [1922, XV-XVI] :

> Camille entra au lycée de Lyon dans la classe de mathématiques spéciales ; en 1855, à 17 ans et demi, il fut reçu premier à l'Ecole Polytechnique. Le jury était composé de Didion, Hermite, Lefébure de Fourcy, Serret et Wertheim ; Serret en particulier, avait la réputation d'être fort difficile ; il donna cependant la note de 19,8 sur 20 au jeune Camille. Ceci nous montre la valeur exceptionnelle du candidat Jordan, et aussi les illusions que se faisaient Serret sur la précision de ses examens.

A sa sortie de l'école des mines et après la soutenance de sa thèse de doctorat en 1861, Jordan débute une carrière d'ingénieur et des recherches sur les substitutions. Les biographies mettent en avant la tradition catholique familiale, représentée par la figure du grand oncle, également nommé Camille Jordan (1771-1821), politicien de la restauration et champion des libertés religieuses [11]. Le foyer fondé par Camille Jordan et Isabelle Munet, qui donnera naissance à huit enfants, conserve cette tradition catholique [12]. L'insistance des biographes sur le contexte

[11] Dès son élection au conseil des cinq-cent, assemblée législative de la convention de l'an III, le grand oncle se fait l'ennemi de la constitution civile du clergé. Dans le portrait qu'il dresse de Jordan au travers de sa correspondance avec Mme de Staël, Sainte Beuve illustre le catholicisme du grand oncle par son action en faveur du rétablissement des sonneries des églises [1884, 256] :

> Il eut beau dire, le lendemain de son Rapport l'incrédulité philosophique prit sa revanche : on le chansonna, on attacha à son nom des sobriquets burlesques, des refrains et des carillons en manière de charivaris. Par exemple, il y eut le *Din, din, dindon, vaudeville,* dédié à Camille Jordan. En voici le dernier couplet : Tu vas donc pour ta récompense,/ Jordan-bourdon,/ Te dire : Il n'est clocher en France, /Ni clocheton/ D'où ne retentisse mon nom.../ Din din, din din / dindon dindon. Il courut contre lui nombre de chansons pareilles, également plates, et qui n'avaient que le refrain. J'en fais grâce.

[12] Extrait de l'éloge prononcé par Bertin, président de l'académie à la mort de Jordan. [Bertin, 1922] :

> Jordan a été un honnête homme, un grand honnête homme dans toutes les acceptions du mot. Il a continué à Paris, dans le même quartier de Paris, la tradition des philosophes chrétiens et des penseurs, auxquels est due la renaissance du catholicisme parisien au commencement du siècle dernier.

Pour d'autres portraits biographiques, voir le texte déjà cité de Lebesgue et l'hommage de Henri Villat qui prend la succession de Jordan à la direction du *Journal de Mathématiques* [Villat, 1922, 1]. L'attachement de Jordan à sa famille s'illustre aussi par la manière dont il use de sa position d'académicien pour publier les *Icones,* œuvres de son oncle botaniste, Alexis Jordan [Comptes Rendus, 1902, 94].

familial n'est pas étrangère à une description des recherches de Jordan, [Dieudonné 1961, XVII] [13] :

> La théorie des groupes finis a été le sujet de prédilection de Jordan [...]. Son œuvre dans ce domaine est immense par le volume comme par l'importance, et son influence sur les développements ultérieurs de la théorie ne peut guère se comparer qu'à celle des travaux de Galois lui-même. [...] Au moment où Jordan commence à écrire, la théorie des groupes est encore dans l'enfance, et en fait ce n'est guère qu'avec la publication des son *traité* qu'elle accèdera au rang de discipline autonome.

Jordan fait sortir la théorie des groupes de l'enfance, et, si l'on file la métaphore familiale de Dieudonné, il est perçu comme second père de la théorie des groupes : après Galois, le géniteur, Jordan serait le guide qui fait gagner l'age adulte. Mais au-delà de l'effet de style, que signifie que, avant Jordan, la théorie des groupes « est encore dans l'enfance » ? Il s'agit de célébrer la théorie présentée par le *Traité des substitutions* qui fait émerger des recherches inspirées par Galois des notions et méthodes essentielles [14]. Par exemple, le chapitre II du *Traité* est consacré au groupe linéaire, dont la structure abstraite bénéficie d'une étude systématique (ordre, éléments générateurs, facteurs de composition etc.). Cette importance accordée au groupe linéaire ne surprendra pas le mathématicien contemporain tant elle paraît naturelle et, précisément, faire accéder la théorie des groupes « au rang de discipline autonome », c'est construire ce naturel qui fera tradition dans les manuels du XX^{e}siècle. Avant la synthèse de Jordan, les propriétés du groupe linéaire ne sont que des méthodes particulières de la recherche des équations résolubles par radicaux : les substitutions linéaires interviennent dans un résultat essentiel, énoncé par Galois sans démonstration [Jordan, 1867] :

> Il [Galois] a partagé les équations irréductibles en deux grandes classes : équations primitives et non primitives. Puis il a énoncé à l'égard des premières : Le degré de toute équation primitive et soluble par radicaux est une puissance d'un nombre premier. Les substitutions de son groupe sont toutes linéaires.

Si l'on sait depuis Galois et Abel à quelles conditions l'équation générale du n^{e}degré est résoluble par radicaux, la caractérisation des équations résolubles particulières est au cœur des premières recherches de Jordan qui développe une méthode théorique de construction des groupes résolubles maximaux du groupe des substitutions. Cette méthode, une « machinerie », une « gigantesque récurrence sur le degré N de l'équation » [Dieudonné, 1970, 168] procède d'une réduction du « genre » du groupe du général au particulier : la recherche des groupes résolubles généraux est réduite à celle de groupes particuliers définis par des

[13] Jean Dieudonné donne un résumé en termes contemporains des travaux algébriques de Jordan à l'occasion de la publication des œuvres de Jordan en 1961.Voir aussi [Julia, 1961, I-IV].

[14] La capacité de Jordan à synthétiser des recherches éparses en un traité synthétique se manifeste également dans ses *Cours d'analyse*de 1893 dont Hélène Gispert a analysé le rôle dans le développement des fondements de l'analyse en France. Voir [Gispert,1982] . C'est dans ce contexte qu'est énoncé, dans le supplément au dernier tome de la première édition de 1887, le *théorème de Jordan*, voir [Guggenheimer, 1977]. qui assure à Jordan une postérité d'analyste mise en valeur par la biographie de Hardy [1922, XLV].

« qualités », ce sont successivement les groupes « transitifs », « primitifs » puis « linéaires ». Le groupe linéaire doit son « origine » à son rôle dans la suite de réductions du problème général et le traité de 1870 organise les propriétés des substitutions linéaires dégagées par Jordan en un tout théorique et « autonome ». Parmi ces propriétés, l'exposé de la forme canonique des substitutions illustre le nouveau caractère théorique de la notion de groupe : d'une méthode particulière des recherches sur la résolubilité des équations, la forme canonique est présentée par le *Traité* comme une réponse à une question naturelle de la théorie du groupe linéaire : « simplifier autant que possible l'expression d'une substitution » [Jordan, 1870, 97]

III. La méthode de réduction et la simplicité : des groupes aux applications.

En 1870, l'astronome Yvon-Villarceau signale à l'Académie parisienne une « incorrection » dans la méthode classique « d'intégration des équations différentielles du mouvement de rotation d'un corps solide, soumis à l'action de la pesanteur ». La méthode a été établie en 1766 par Lagrange pour un problème remontant à d'Alembert : étant donnée une corde fixée en un point,lestée d'un nombre quelconque de masses, et écartée de sa position d'équilibre, décrire ses « petites oscillations ». L'application de la méthode de Lagrange aux mouvements séculaires des planètes porte des enjeux importants pour les mathématiques appliquées. Le principe de conservation des forces vives permet de mathématiser le problème par un système d'équations différentielles linéaires à coefficients constants dont l'intégration nécessite la détermination d'une équation algébrique, nommée équation caractéristique depuis Cauchy. Les oscillations d'une corde chargée de n masses peuvent s'interpréter comme celles de n cordes chargées d'une seule masse : la traduction mathématique de cette représentation mécanique sous-tend la méthode de Lagrange qui ramène l'intégration du système à celle de n équations indépendantes, $\frac{d^2\xi}{dt^2} + K\xi = 0,\ K$ racine de l'équation caractéristique. La méthode nécessite de supposer les racines K de l'équation caractéristique toutes distinctes[15]. Ces racines représentant les périodes des petites oscillations, Lagrange interprète l'occurrence de racines multiples comme synonyme d'instabilité du système : les oscillations ne restent pas bornées. Yvon Villarceau critique cette interprétation et soumet à l'académie la question de l'intégration du système en cas de racines multiples. La réponse est apportée par Camille Jordan [1871, 787] :

[15]En termes contemporains, la matrice du système d'équations est diagonalisable car symétrique.

$$(1)\quad \begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= a_1\,x_1 + \cdots + \ell_1\,x_n, \cdots, \\ \frac{dx_2}{dt} &= a_2\,x_1 + \cdots + \ell_2\,x_n, \cdots, \\ &\vdots \\ \frac{dx_n}{dt} &= a_n\,x_1 + \cdots + \ell_n\,x_n, \cdots \end{aligned}$$

> Ce problème peut cependant se résoudre très simplement par un procédé identique à celui dont nous nous sommes servi, dans notre Traité des substitutions, pour ramener une substitution linéaire quelconque à sa forme canonique. Nous allons ramener de même le système (I) à une forme canonique qui puisse s'intégrer immédiatement. [...] on voit que les variables indépendantes peuvent être choisies de telles sorte qu'aux μ racines égales à σ que possède l'équation $\Delta = 0$ correspondent μ variables nouvelles formant un certain nombre de séries contenant respectivement r, r', $\cdots$ variables, $r + r' + \cdots$ étant égal à μ, et les variables d'une même série étant liées par une suite de relations de la forme
>
> $$(6)\quad \frac{dy_1}{dt} = \sigma\,y_1,\ \frac{dz_1}{dt} = \sigma\,z_1 + y_1,\ \frac{du_1}{dt} = \sigma\,u_1 + z_1, \cdots, \frac{dw_1}{dt} = \sigma\,w_1 + v_1$$
>
> [...] le système des équations (6) aura évidemment pour intégrales le système suivant : $w_1 = e^{\sigma t}\psi(t), ?1 = e^{\sigma t}\psi'(t), \cdots, y1 = e^{\sigma t}\psi^{r-1}(t), \psi(t)$ étant une fonction entière arbitraire du degré $r - 1$.

Le problème général de l'intégration des systèmes d'équations linéaires à coefficients cons- tants est résolu par application de la forme canonique des substitutions. L'interprétation mécanique sous-jacente à la méthode de Lagrange est remplacée par des notions de la théorie des groupes. Si, pour Jordan, le problème peut se résoudre « très simplement », la simplicité renvoie à la méthode de « réduction » mise en œuvre pour la théorie des groupes : l'algèbre donne une solution générale au problème de mécanique par sa capacité à « réduire » le problème en une « suite » de problèmes « simples ». Les variables du système d'équations sont interprétées comme sujettes à l'action d'une substitution du groupe linéaire qu'une caractéristique (la décomposition en facteurs irréductibles du polynôme caractéristique) permet de regrouper en « un certain nombre de séries », de « ramener » à une « suite » de « formes simples » dont l'intégration est connue. On comprend alors que la méthode de réduction de Jordan supporte une perception de la « généralité » indissociable d'un idéal de simplicité. Cette simplicité s'incarne dans la notion de forme canonique dont Jordan fait une application systématique dans les années 1870[16], le problème mécanique de Lagrange amène en particulier Jordan à étudier la résolution indépendante de Weierstrass [1868] et ouvre à ses recherches un nouvel univers, la théorie des formes quadratiques et bilinéaires à laquelle il contribuera pendant toute sa carrière[17].

[16] La méthode de réduction qui s'incarne dans la forme canonique doit être rapprochée du résultat fondamental qu'est le théorème de Jordan-Hölder énoncé par Jordan dans le même contexte de recherches sur les groupes résolubles.

[17] Dès 1872, Jordan publie une note dans laquelle le problème symétrique de Lagrange est formulé

La querelle de 1874 entre Jordan et Kronecker oppose deux perceptions du rôle de l’algèbre et de sa capacité à la généralité. A l’idéal arithmétique de Kronecker répond le point de vue de Jordan selon lequel une résolution « générale » n’a de sens qu’en tant qu’elle procède de la « réduction » d’un problème jusqu’à son expression ultime qualifiée de « simple ». A l’opposée de l’effectivité revendiquée par Kronecker, le critère de réduction de Jordan présente en caractère abstrait, il demande que soient extraites toutes les racines d’une équation algébrique pour l’obtention d’une « réduite », définie par une « qualité », sa simplicité. « Généralité », « abstraction », « qualité », les idéaux de la théorie des groupes relevés par Picard entrent avec Jordan dans des mathématiques appliquées. La querelle de 1874 s’achève par la victoire de Kronecker, dont Jordan reconnaît finalement la priorité en 1881, la méthode de Weierstrass s’impose avec l’influent mémoire de Frobenius [1878] qui fixe la théorie des formes bilinéaires pour plusieurs décennies. La postérité de la forme canonique est cependant assurée par les multiples applications qu’en proposera Jordan tout au long de sa carrière. Les travaux sur l’intégration algébrique des équations différentielles, pour lesquelles Jordan recherche l’énumération des sous groupes finis des groupes linéaires en parallèle aux travaux de Klein, assurent à la forme de Jordan un impact immédiat, notamment sur les premières recherches de Poincaré Au début du XXe siècle, alors que la notion de matrice gagne en importance dans l’algèbre linéaire naissante, la représentation par tableaux donne une forme à la méthode de réduction de Jordan : la réduction par blocs de la décomposition matricielle [De Seguier, 1907].

BERTIN, E.	1922	« DÉCÈS DE MEMBRES ET DE CORRESPONDANTS.- De M. *Camille Jordan*, membre de la section de géométrie », *Comptes Rendus Ac. Sci. Paris* t. **174**, 209.
BRECHENMACHER, F.	2005	*Une histoire de formes en mathématiques : la forme canonique de Jordan (1870-1930).* Thèse de doctorat de l’E.H.E.S.S. Paris.
DE SEGUIER	1907	« Sur la théorie des matrices, » *Comptes Rendus Ac. Sci. Paris* t. **145**, 1259.
DIEUDONNE, J.	1961	« Notes sur les travaux de C. Jordan relatifs à l’algèbre linéaire et multilinéaire et à la théorie des nombres, » *Œuvres de C. Jordan*, t. **III**, V-XX,
	1970	« Camille Jordan », *in* Gillispie, C. C., ed. *Dictionary of Scientific Biography* . 18 vols. New York : Scribner
GISPERT-CHAMBAZ, H	1982	*Camille Jordan et les fondements de l’analyse : Comparaison de la 1ère édition (1882- 1887) et de la 2ème (1893) de son cours d’analyse de l’école Polytechnique,* Orsay.
GUGGENHEIMER, H	1977	« The Jordan curve Theorem and an Unpublished Manuscript by Max Dehn, » *Archive for History of Exact Sciences*, **17**, 193-200.**21**, 43-45.

dans le cadre de la théorie des formes quadratiques. Jordan démontre que dans ce cas la forme canonique obtenue est, en termes contemporains, une forme diagonale.

HARDY, H.	1923	« Camille Jordan, » *Proc. London Math, Soc.*
HAWKINS, T.	1977	« Weierstrass and the Theory of Matrices. » *Arch. Hist. Exact Sci.* **17** (2) ,119-161
JORDAN, C.	1867	« Lettre à M. Liouville sur la résolution algébrique des équations » *J. de Math,* **(2), 12**, 105-108.
	1870	*Traité des substitutions et des équations algébriques*. Paris.
	1871	« Sur la résolution des équations différentielles linéaires », *Comptes rendus Acad, Sci, Paris,* **73**, 787-791.Oeuvres **IV** 313-318
	1872	« Sur les oscillations infiniment petites des systèmes matériels », *Comptes rendus Acad, Sci, Paris,* **74**, 1395-1399. Oeuvres **IV** 318-323.
	1874a	« Mémoire sur les formes bilinéaires, » *l. de math.*. **(2) 19**, 35-54.
	1874b	« Sur la réduction des formes bilinéaires, » *Comptes rendus Acad, Sci, Paris*, **78**,614-617.
KRONECKER, L.	1874a	« Ueber Schaaren von quadratischen und bilinearen Formen, » *M'ber. Akad. Wiss. Berlin* = *Werke* 1 (Leipzig & Berlin, 1895), 349-413.
	1874b	« Sur les faisceaux de formes quadratiques et bilinéaires, » *Comptes rendus Acad. Sci. Paris. 78* = *Werke* 1 (Leipzig 1895), 415-419
	1874c.	« Ueber die congruenten Transformationen des bilinearen Formen, » *M'ber. Akad. Wiss. Berlin* = *Werke* 1 (Leipzig& Berlin, 1929), 421-483.
LEBESGUE, H.	1923	« Notice sur la vie et les travaux de Camille Jordan, » *Mémoires de l'Acad. Sci. Paris*, 2^e^série, 58, 29-66.
SAINTE BEUVE, C.A.	1884	*Nouveaux Lundis*, t. **12**, Paris.
VILLAT, H.	1922	« Camille Jordan, » *Journal de mathématiques,* **(9), 1**, 1-5.
WEIERSTRASS, K.	1868	« Zur Theorie der quadratischen und bilinearen Formen, » *M'ber. Akad. der Wiss. Berlin, =Werke* 1 (Berlin 1894) 233-246
YVON-VILLARCEAU, A.	1870	« Note sur les conditions des petites oscillations d'un corps solide de figure quelconque et la théorie des équations différentielles linéaires. » *Comptes rendus Acad. Sci. Paris* **71**. 762-766.